Тәжірибелік сабақ 3
Гиперболалық типті теңдеулердің жалпы шешімі

$Q=\{(x,t):\ x\in R,\ \ t>0\}$ - жарты жазықтығында анықталған

$$U_{tt}=a^2U_{xx}+f(x,t) \tag{1}$$

бір өлшемді толқын теңдеуін қарастырайық. (1) теңдеуін еркін емес ішек тербілісінің теңдеуі деп атайды.

1-қадам. (1) теңдеуін канондық түрге келтіру үшін оның характеристикалық теңдеуін құрып, характеристикаларды табамыз:

$$(dx)^2=(adt)^2\Rightarrow dx=\pm adt$$

Осы теңдеулерді интегралдау арқылы $x-at=c;\ \ x+at=c$ интегралдар үйірін табамыз.

2-қадам. Жаңа айнымалылар енгіземіз:

$$\begin{cases}\xi=x-at\\ \eta=x+at\end{cases},\quad J=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_t\\ \eta_x & \eta_t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -a\\ 1 & a\end{vmatrix}=2a\neq 0$$

3-қадам. $\upsilon(x,t)$ функциясының дербес туындыларын ξ және η айнымалары арқылы өрнектейміз:

$$\upsilon_t=\upsilon_\xi\,\xi_t+\upsilon_\eta\eta_t=-a\upsilon_\xi+a\upsilon_\eta$$

$$\upsilon_x=\upsilon_\xi\,\xi_x+\upsilon_\eta\eta_x=-a\upsilon_\xi+a\upsilon_\eta$$

$$\upsilon_{tt}=a^2\upsilon_{\xi\xi}-2a^2\upsilon_{\eta\eta}+a^2\upsilon_{\eta\eta}$$

$$\upsilon_{xx}=\upsilon_{\xi\xi}+2\upsilon_{\xi\eta}+\upsilon_{\eta\eta}$$

4-қадам. Табылған дербес туындыларды (3) теңдеуіне апарып қойып, теңдеудің канондық түрін аламыз:

$$a^2\upsilon_{\xi\xi}-2a^2\upsilon_{\xi\,\eta}+a^2\upsilon_{\eta\eta}=a^2\upsilon_{\xi\xi}+2a^2\upsilon_{\xi\eta}+a^2\upsilon_{\eta\eta}\Rightarrow\upsilon_{\xi\eta}=0 \tag{7}$$

(7.5.7) канондық теңдеуінің шешімін табамыз:

$$\upsilon_{\xi\eta}=0\Rightarrow\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\xi\partial\eta}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta}\right)=0 \tag{8}$$

$\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\eta}=\theta(\xi,\eta)$ деп белгілейік. η - бекітілген нүкте болсын, бұл жағдайда $\theta(\xi,\eta_\delta)$ функциясы ξ айнымалысына байланысты бір айнымалы функция болады. Сондықтан (8) теңдігінен жай дифференциалдық теңдеуге келеміз, яғни

$$\frac{d\theta(\xi,\eta_\delta)}{d\xi}=0\Rightarrow\theta(\xi,\eta_\delta)\equiv g-const$$

Бұдан g тұрақтысының η айнымалысына байланысты дифференциалданатын функция болатындығын көреміз, яғни

$$\theta(\xi,\eta)=g(\eta) \tag{9}$$

Олай болса,

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta}=g(\eta) \tag{10}$$

Бұдан

$$\frac{d\upsilon(\xi_\delta,\eta)}{d\eta}=g(\eta)\Rightarrow d\upsilon(\xi_\delta,\eta)=g(\eta)d\eta\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\upsilon(\xi_\delta,\eta)=\int g(\eta)d\eta+f_1(\xi_\delta)\Rightarrow\upsilon(\xi,\eta)=\int g(\eta)d\eta+f_1(\xi)=f_1(\xi)+f_2(\eta),$$

мұндағы $f_2(\eta)=\int g(\eta)d\eta$.

Сонымен, қайтадан x, y айнымаларға көшіп (3) теңдеуінің

$$\upsilon(x,t)= f_1(x-at)+ f_2(x+at) \tag{11}$$

жалпы шешімін аламыз.